

BATAS ATAS RAINBOW CONNECTION NUMBER PADA GRAF *BUCKMINSTERFULLERENE*

FITRI ANGGALIA, LYRA YULIANTI, DES WELYYANTI

*Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Andalas,
Lima Manis, Padang, Indonesia
fitri.anggalia@gmail.com*

Abstrak. Misalkan G adalah suatu graf terhubung tak trivial. Suatu pewarnaan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}, k \in \mathbb{N}$ pada graf G adalah suatu pewarnaan sisi di G sedemikian sehingga setiap sisi bertetangga boleh berwarna sama. Misalkan $u, v \in V(G)$ dan P adalah suatu lintasan dari u ke v . Suatu lintasan P dikatakan *rainbow path* jika tidak terdapat dua sisi di P berwarna sama. Graf G disebut *rainbow connected* dengan pewarnaan c jika untuk setiap $u, v \in V(G)$ terdapat *rainbow path* dari u ke v . Jika terdapat k warna di G maka c adalah *rainbow k -coloring*. *Rainbow connection number* dari graf terhubung dinotasikan dengan $rc(G)$, didefinisikan sebagai banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk membuat graf G bersifat *rainbow connected*. Dalam makalah ini akan ditentukan batas atas *Rainbow Connection Number* pada Graf *Buckminsterfullerene*.

Kata Kunci : Batas Atas, Graf *Buckminsterfullerene*, *Rainbow connection number*.

1. Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu cabang ilmu matematika diskrit yang banyak penerapannya dalam berbagai bidang ilmu salah satunya adalah kimia, atom karbon dapat direpresentasikan menjadi sebuah graf, seperti *fullerene*. *Fullerene* adalah molekul polihedral yang terbentuk dari atom karbon yang dapat direpresentasikan menjadi sebuah graf dengan atom sebagai titik dan ikatan antar atom sebagai sisi. Graf *Fullerene* adalah graf planar 3-reguler terhubung yang berbentuk pentagon dan heksagon. Graf *Fullerene* dengan banyak titik genap telah didefinisikan oleh Grunbaum dan Motzkin, seperti $n = 20$ yaitu graf *Dodecahedral*, $n = 24$ yaitu graf *Petersen* umum, dan $n = 60$ yaitu graf *Buckminsterfullerene* [1]. Graf *Buckminsterfullerene* adalah salah satu graf *Fullerene* yang berbentuk tabung (nanotube) dengan banyak titik $n = 60$. Graf *Buckminsterfullerene* B_{60} dapat dibentuk dari lima graf lingkaran dengan melakukan penambahan sisi, lima graf lingkaran pembentuknya adalah $C_5, C_{15}, C_{20}, C_{15}^*$, dan C_5^* . Dalam makalah ini akan dibahas mengenai *rainbow connection number* dari graf *Buckminsterfullerene*

2. Tinjauan Teori

Hubungan $diam(G), rc(G), src(G)$ dan banyak sisi m pada suatu graf terhubung G akan dijelaskan pada proposisi berikut.

Proposisi 2.1. [2] Misalkan G adalah graf terhubung tak trivial berukuran m . Jika $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}, k \in \mathbb{N}$ merupakan *rainbow coloring*, maka

$$diam(G) \leq rc(G) \leq src(G) \leq m.$$

Berikut teorema yang membahas tentang graf G dengan ukuran m yang mempunyai nilai $rc(G)$ dan $src(G)$ yaitu 1, 2, dan m .

Teorema 2.2. [6] Misalkan G adalah suatu graf terhubung tak trivial berukuran m , maka

- (1) $rc(G) = src(G) = 1$ jika dan hanya jika G adalah graf lengkap;
- (2) $rc(G) = 2$ jika dan hanya jika $src(G) = 2$;
- (3) $rc(G) = m$ jika dan hanya jika G adalah graf pohon;

Berikut adalah *rainbow connection number* untuk graf lingkaran dengan $n \geq 4$.

Teorema 2.3. [6] Misalkan C_n adalah graf lingkaran dengan banyak titik n , maka $rc(C_n) = src(C_n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ untuk $n \geq 4$.

3. Batas Atas *Rainbow Connection Number* Pada Graf *Buckminsterfullerene*

Graf *Buckminsterfullerene* B_{60} adalah graf yang dapat dibentuk dari lima graf lingkaran dengan melakukan penambahan sisi, dari yang terluar graf lingkarannya adalah C_5 , C_{15} , C_{20} , C_{15}^* , dan C_5^* . Himpunan titik dan sisi graf *Buckminsterfullerene* B_{60} sebagai berikut:

- (1) Graf C_5 memiliki himpunan titik $\{v_i \mid 1 \leq i \leq 5\}$ dan himpunan sisi $\{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq 4\} \cup \{v_1 v_5\}$
- (2) Graf C_{15} memiliki himpunan titik $\{w_j \mid 1 \leq j \leq 15\}$ dan himpunan sisi $\{w_j w_{j+1} \mid 1 \leq j \leq 14\} \cup \{w_1 w_{15}\}$
- (3) Graf C_{20} memiliki himpunan titik $\{x_k \mid 1 \leq k \leq 20\}$ dan himpunan sisi $\{x_k x_{k+1} \mid 1 \leq k \leq 19\} \cup \{x_1 x_{20}\}$
- (4) Graf C_{15}^* memiliki himpunan titik $\{y_l \mid 1 \leq l \leq 15\}$ dan himpunan sisi $\{y_l y_{l+1} \mid 1 \leq l \leq 14\} \cup \{y_1 y_{15}\}$
- (5) Graf C_5^* memiliki himpunan titik $\{z_m \mid 1 \leq m \leq 5\}$ dan himpunan sisi $\{z_m z_{m+1} \mid 1 \leq m \leq 4\} \cup \{z_1 z_5\}$
- (6) $E_1 = \{z_1 y_2, z_2 y_5, z_4 y_{11}, z_5 y_{14}, v_3 w_{11}\}$
 $E_2 = \{y_1 x_{19}, y_3 x_{18}, y_4 x_{15}, y_6 x_{14}, y_7 x_{11}, y_9 x_{10}, y_{10} x_7, y_{12} x_6, y_{13} x_3, y_{15} x_2\}$
 $E_3 = \{x_1 w_4, x_4 w_3, x_5 w_1, x_8 w_{15}, x_9 w_{13}, x_{12} w_{12}, x_{13} w_{10}, x_{16} w_9, x_{17} w_7, x_{20} w_6\}$
 $E_4 = \{v_1 w_5, v_2 w_8, v_4 w_{14}, v_5 w_2, z_3 y_8\}$

Pada Teorema 3.1 berikut diberikan hasil pertama pada penelitian ini, yaitu batas atas *rainbow connection number* pada graf *Buckminsterfullerene* B_{60} .

Teorema 3.1. \diamond Misalkan terdapat graf *Buckminsterfullerene* B_{60} maka

$$rc(B_{60}) \leq 12$$

Bukti. Akan dibuktikan bahwa $rc(B_{60}) \leq 12$. Diketahui bahwa graf *Buckminsterfullerene* B_{60} dibentuk dari lima graf lingkaran dengan penambahan beberapa sisi,

lima graf lingkaran tersebut adalah yaitu $C_5, C_{15}, C_{20}, C_{15}^*$, dan C_5^* . Didefinisikan pewarnaan sisi Graf B_{60} sebagai berikut.

1. Pewarnaan sisi graf C_5 ,

$$c(v_i v_{i+1}) = \begin{cases} 4 & , \text{ untuk } i = 1; \\ 2 & , \text{ untuk } i = 2, 4; \\ 5 & , \text{ untuk } i = 3. \end{cases}$$

$$c(v_1 v_5) = 10$$

2. Pewarnaan sisi graf C_{15} ,

$$c(w_j w_{j+1}) = \begin{cases} j & , \text{ untuk } 1 \leq j \leq 3, 6 \leq j \leq 8; \\ 5 & , \text{ untuk } j = 4, 12; \\ 4 & , \text{ untuk } j = 5, 13; \\ j - p - 1 & , \text{ untuk } 9 \leq j \leq 11, 14. \end{cases}$$

$$c(w_1 w_{15}) = 9.$$

3. Pewarnaan sisi graf C_{20} ,

$$c(x_k x_{k+1}) = \begin{cases} k & , \text{ untuk } 1 \leq k \leq 10; \\ k - 10 & , \text{ untuk } 11 \leq k \leq 19. \end{cases}$$

$$c(x_1 x_{20}) = 10.$$

4. Pewarnaan sisi graf C_{15}^* ,

$$c(y_l y_{l+1}) = \begin{cases} l & , \text{ untuk } 1 \leq l \leq 8; \\ l - 8 & , \text{ untuk } 9 \leq l \leq 14. \end{cases}$$

$$c(y_1 y_{15}) = 7.$$

5. Pewarnaan sisi graf C_5^* ,

$$c(z_m z_{m+1}) = \begin{cases} 6 & , \text{ untuk } m = 1, 3; \\ 7 & , \text{ untuk } m = 2, 4. \end{cases}$$

$$c(v_1 v_5) = 8.$$

6. Pewarnaan sisi E_1, E_2, E_3, E_4 adalah

$$c(e_1) = 10, c(e_2) = 12, c(e_3) = 11, c(e_4) = 9,$$

dimana $e_1 \in E_1, e_2 \in E_2, e_3 \in E_3, e_4 \in E_4$.

Berdasarkan pendefinisian pewarnaan sisi tersebut, misalkan a dan b adalah dua titik sebarang yang berbeda pada graf B_{60} . Lintasan- (a, b) rainbow akan ditunjukkan dalam beberapa kasus berikut.

Kasus 1. Akan ditunjukkan untuk dua titik sebarang pada masing-masing graf $C_5, C_{15}, C_{20}, C_{15}^*$, dan C_5^* terdapat lintasan rainbow. Perhatikan pewarnaan sisi graf B_{60} , karena graf $C_5, C_{15}, C_{20}, C_{15}^*$, dan C_5^* termuat di dalam graf B_{60} , berdasarkan Teorema 2.3 maka untuk dua titik sebarang pada masing-masing graf $C_5, C_{15}, C_{20}, C_{15}^*$, dan C_5^* terdapat lintasan rainbow.

Kasus 2. Graf C_5 dan C_{15} , misalkan $a = v_i$ dan $b = w_j$ maka lintasan- (a, b) rainbow yang menghubungkan titik v_i ke titik w_j adalah

- v_i bertetangga dengan w_j , lintasannya adalah z_m, y_l .
- Misalkan terdapat v_i bertetangga dengan w_c dimana $c \neq j$, lintasannya adalah $v_i, w_c, w_{c+1}, \dots, w_j$ atau $v_i, w_c, w_{c-1}, \dots, w_j$.

- Misalkan terdapat v_d bertetangga dengan w_j dimana $d \neq i$, lintasannya adalah $v_i, v_{i+1}, \dots, v_d, w_j$ atau $v_i, v_{i-1}, \dots, v_d, w_j$.

Pembuktian kasus diatas berlaku untuk graf C_5^* dan C_{15}^* , misalkan $a = z_m$ dan $b = y_l$ maka akan selalu terdapat lintasan- (a, b) *rainbow* yang menghubungkan titik z_m ke titik y_l .

Kasus 3. Graf C_{15} dan C_{20} misalkan $a = w_j$ dan $b = x_k$ maka lintasan- (a, b) *rainbow* yang menghubungkan titik w_j ke titik x_k adalah

- w_j bertetangga dengan x_k , lintasannya adalah w_j, x_k .
- Misalkan terdapat w_j bertetangga dengan x_c dimana $c \neq k$, lintasannya adalah $w_j, x_c, x_{c+1}, \dots, x_k$ atau $w_j, x_c, x_{c-1}, \dots, x_k$.
- Misalkan terdapat w_d bertetangga dengan x_k dimana $d \neq j$, lintasannya adalah $w_j, w_{j+1}, \dots, w_d, x_k$ atau $w_j, w_{j-1}, \dots, w_d, x_k$.
- Misalkan terdapat w_d bertetangga dengan x_c dimana $d \neq l$ dan $c \neq k$, lintasannya adalah

$$w_l, w_{l+1}, \dots, w_d, x_c, x_{c+1}, \dots, x_k \text{ atau } w_l, w_{l+1}, \dots, w_d, x_c, x_{c-1}, \dots, x_k \text{ atau } w_l, w_{l-1}, \dots, w_d, x_c, x_{c+1}, \dots, x_k \text{ atau } w_l, w_{l-1}, \dots, w_d, x_c, x_{c-1}, \dots, x_k.$$

- $a = w_{11}$ dan $b = x_3$, lintasannya adalah $w_{11}, v_3, v_4, v_5, w_2, w_1, x_5, x_4, x_3$.

Graf C_{15}^* dan C_{20} dapat dibuktikan dengan oembuktian kasus diatas, misalkan $a = y_l$ dan $b = x_k$ maka akan selalu terdapat lintasan- (a, b) *rainbow* yang menghubungkan titik y_l ke titik x_k .

Kasus 4. Graf C_5 dan C_{20} , misalkan $a = v_i$ dan $b = x_k$ maka lintasan- (a, b) *rainbow* yang menghubungkan titik v_i ke titik x_k adalah

- Misalkan terdapat v_i bertetangga dengan w_c , w_d bertetangga dengan x_k , dimana $c \neq d$, lintasannya adalah $v_i, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_k$ atau $v_i, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_k$.
- Misalkan terdapat v_i bertetangga dengan w_c , w_d bertetangga dengan x_g , dimana $c \neq d$, $g \neq k$ lintasannya adalah $v_i, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_g, x_{g+1}, \dots, x_k$ atau $v_i, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_g, x_{g-1}, \dots, x_k$ atau $v_i, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_g, x_{g+1}, \dots, x_k$ atau $v_i, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_g, x_{g-1}, \dots, x_k$.
- Misalkan terdapat v_e bertetangga dengan w_c , w_d bertetangga dengan x_k , dimana $e \neq i$, $c \neq d$, lintasannya adalah $v_i, v_{i+1}, \dots, v_e, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_k$ atau $v_i, v_{i+1}, \dots, v_e, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_k$ atau $v_i, v_{i-1}, \dots, v_e, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_k$ atau $v_i, v_{i-1}, \dots, v_e, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_k$.
- Misalkan terdapat v_e bertetangga dengan w_c , w_d bertetangga dengan x_g , dimana $e \neq i$, $c \neq d$, $g \neq k$ lintasannya adalah

$$v_i, v_{i+1}, \dots, v_e, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_g, x_{g+1}, \dots, x_k \text{ atau } v_i, v_{i+1}, \dots, v_e, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_g, x_{g-1}, \dots, x_k \text{ atau } v_i, v_{i+1}, \dots, v_e, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_g, x_{g+1}, \dots, x_k \text{ atau } v_i, v_{i+1}, \dots, v_e, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_g, x_{g-1}, \dots, x_k \text{ atau } v_i, v_{i-1}, \dots, v_e, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_g, x_{g+1}, \dots, x_k \text{ atau } v_i, v_{i-1}, \dots, v_e, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_g, x_{g-1}, \dots, x_k \text{ atau}$$

$$v_i, v_{i-1}, \dots, v_e, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_g, x_{g+1}, \dots, x_k \text{ atau} \\ v_i, v_{i-1}, \dots, v_e, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_g, x_{g-1}, \dots, x_k.$$

Graf C_5^* dan C_{20} , misalkan $a = y_l$ dan $b = x_k$ maka untuk lintasan- (a, b) rainbow yang menghubungkan titik y_l ke titik x_k dapat dibuktikan dengan pembuktian lintasan rainbow pada kasus diatas.

Pembuktian lintasan rainbow untuk graf C_{15} dan C_{15}^* , similiar dengan pembuktian diatas, sehingga misalkan $a = w_j$ dan $b = y_l$ maka akan selalu terdapat lintasan- (a, b) rainbow yang menghubungkan titik w_j ke titik y_l .

Kasus 5. Graf C_5 dan C_{15}^* , misalkan $a = v_i$ dan $b = y_l$ maka lintasan- (a, b) rainbow yang menghubungkan titik v_i ke titik y_l adalah

- Misalkan terdapat v_i bertetangga dengan w_c , w_d bertetangga dengan x_e , x_f bertetangga dengan y_l , dimana $c \neq d$, $e \neq f$ lintasannya adalah

$$v_i, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_l \text{ atau } v_i, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_l \\ \text{atau } v_i, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_l \text{ atau} \\ v_i, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_l.$$

- Misalkan terdapat v_i bertetangga dengan w_c , w_d bertetangga dengan x_e , x_f bertetangga dengan y_g , dimana $c \neq d$, $e \neq f$, $g \neq l$ lintasannya adalah

$$v_i, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_g, y_{g+1}, \dots, y_l \text{ atau} \\ v_i, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_g, y_{g-1}, \dots, y_l \text{ atau} \\ v_i, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_g, y_{g+1}, \dots, y_l \text{ atau} \\ v_i, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_g, y_{g-1}, \dots, y_l \text{ atau} \\ v_i, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_g, y_{g+1}, \dots, y_l \text{ atau} \\ v_i, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_g, y_{g-1}, \dots, y_l \text{ atau} \\ v_i, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_g, y_{g+1}, \dots, y_l \text{ atau} \\ v_i, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_g, y_{g-1}, \dots, y_l.$$

- Misalkan terdapat v_h bertetangga dengan w_c , w_d bertetangga dengan x_e , x_f bertetangga dengan y_l , dimana $h \neq i$, $c \neq d$, $e \neq f$, lintasannya adalah

$$v_i, v_{i+1}, \dots, v_h, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_l \text{ atau} \\ v_i, v_{i+1}, \dots, v_h, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_l \text{ atau} \\ v_i, v_{i+1}, \dots, v_h, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_l \text{ atau} \\ v_i, v_{i+1}, \dots, v_h, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_l \text{ atau} \\ v_i, v_{i-1}, \dots, v_h, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_l \text{ atau} \\ v_i, v_{i-1}, \dots, v_h, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_l \text{ atau} \\ v_i, v_{i-1}, \dots, v_h, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_l \text{ atau} \\ v_i, v_{i-1}, \dots, v_h, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_l.$$

- Misalkan terdapat v_h bertetangga dengan w_c , w_d bertetangga dengan x_e , x_f bertetangga dengan y_g , dimana $h \neq i$, $c \neq d$, $e \neq f$, $g \neq l$ lintasannya adalah

$$v_i, v_{i+1}, \dots, v_h, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_g, y_{g+1}, \dots, y_l \text{ atau} \\ v_i, v_{i+1}, \dots, v_h, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_g, y_{g-1}, \dots, y_l \text{ atau} \\ v_i, v_{i+1}, \dots, v_h, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_g, y_{g+1}, \dots, y_l \text{ atau}$$

$v_i, v_{i+1}, \dots, v_h, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_g, y_{g-1}, \dots, y_l$ atau
 $v_i, v_{i+1}, \dots, v_h, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_g, y_{g+1}, \dots, y_l$ atau
 $v_i, v_{i+1}, \dots, v_h, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_g, y_{g-1}, \dots, y_l$ atau
 $v_i, v_{i+1}, \dots, v_h, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_g, y_{g+1}, \dots, y_l$ atau
 $v_i, v_{i+1}, \dots, v_h, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_g, y_{g-1}, \dots, y_l$ atau
 $v_i, v_{i-1}, \dots, v_h, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_g, y_{g+1}, \dots, y_l$ atau
 $v_i, v_{i-1}, \dots, v_h, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_g, y_{g-1}, \dots, y_l$ atau
 $v_i, v_{i-1}, \dots, v_h, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_g, y_{g+1}, \dots, y_l$ atau
 $v_i, v_{i-1}, \dots, v_h, w_c, w_{c+1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_g, y_{g-1}, \dots, y_l$ atau
 $v_i, v_{i-1}, \dots, v_h, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_g, y_{g+1}, \dots, y_l$ atau
 $v_i, v_{i-1}, \dots, v_h, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e+1}, \dots, x_f, y_g, y_{g-1}, \dots, y_l$ atau
 $v_i, v_{i-1}, \dots, v_h, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_g, y_{g-1}, \dots, y_l$ atau
 $v_i, v_{i-1}, \dots, v_h, w_c, w_{c-1}, \dots, w_d, x_e, x_{e-1}, \dots, x_f, y_g, y_{g-1}, \dots, y_l$.

Pembuktian kasus 5 similiar untuk graf C_5^* dan C_{15} , misalkan $a = z_m$ dan $b = w_j$ maka akan selalu terdapat lintasan- (a, b) *rainbow* yang menghubungkan titik z_m ke titik w_j .

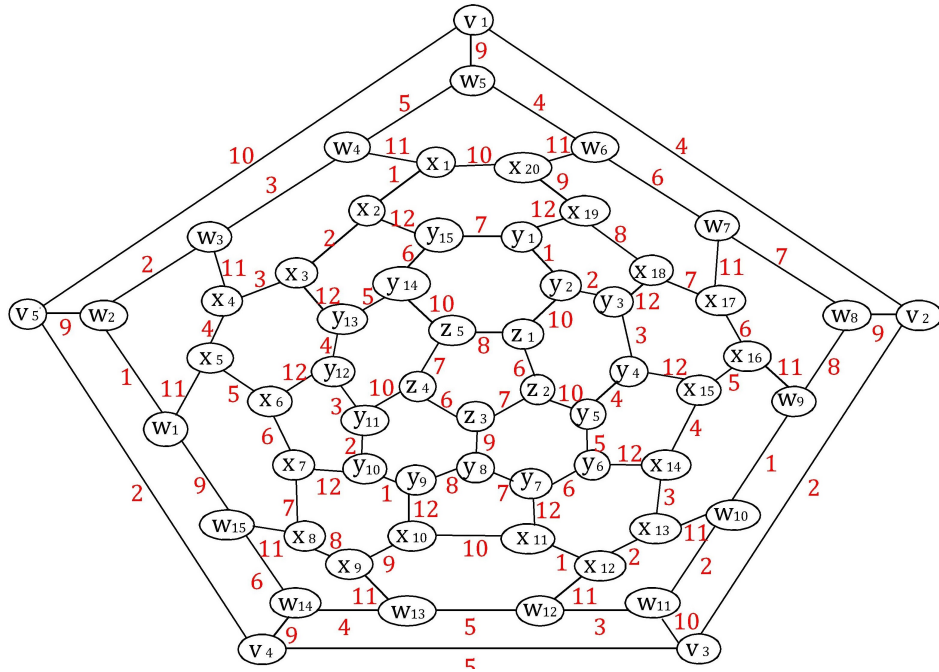
Kasus 6. Graf C_5^* dan C_5 , misalkan $a = z_m$ dan $b = v_i$ maka lintasan- (a, b) *rainbow* yang menghubungkan titik z_m ke titik v_i adalah

- $a = z_1$ dan $b = v_i$, dimana $i = 1, 2, 3$, maka lintasan *rainbow* yaitu $z_1, z_5, y_{14}, y_{15}, x_2, x_1, w_4, w_5, v_1, v_2, v_3$
- $a = z_1$ dan $b = v_i$, dimana $i = 4, 5$, maka lintasan *rainbow* yaitu $z_1, z_5, y_{14}, y_{13}, x_3, x_4, w_3, w_2, v_5, v_4$.
- $a = z_2$ dan $b = v_i$, dimana $i = 1, 2$, maka lintasan *rainbow* yaitu $z_2, y_5, y_4, x_{15}, x_{16}, w_9, w_8, v_2, v_1$.
- $a = z_2$ dan $b = v_3$, lintasanya adalah $z_2, y_5, y_6, x_{14}, x_{13}, w_{10}, w_9, w_8, v_2, v_3$.
- $a = z_2$ dan $b = v_i$, dimana $i = 4, 5$, maka lintasan *rainbow* yaitu $z_2, z_1, z_5, y_{14}, y_{13}, x_3, x_4, w_3, w_2, v_5, v_4$.
- $a = z_3$ dan $b = v_1$, lintasanya adalah $z_3, z_4, y_{11}, y_{12}, y_{13}, x_3, x_2, x_1, w_4, w_5, v_1$.
- $a = z_3$ dan $b = v_2$, lintasanya adalah $z_3, z_2, y_5, y_4, x_{15}, x_{16}, w_9, w_8, v_2$.
- $a = z_3$ dan $b = v_i$, dimana $i = 3, 4, 5$, maka lintasan *rainbow* yaitu $z_3, y_8, y_7, x_{11}, x_{12}, w_{12}, w_{11}, v_3, v_4, v_5$.
- $a = z_4$ dan $b = v_1$, lintasanya adalah $z_4, y_{11}, y_{12}, y_{13}, x_3, x_2, x_1, w_4, w_5, v_1$.
- $a = z_4$ dan $b = v_2$, lintasanya adalah $z_4, z_3, z_2, y_5, y_4, x_{15}, x_{16}, w_9, w_8, v_2$.
- $a = z_4$ dan $b = v_3$, lintasanya adalah $z_4, z_3, y_8, y_7, x_{11}, x_{12}, w_{12}, w_{11}, v_3$.
- $a = z_4$ dan $b = v_i$, dimana $i = 4, 5$, maka lintasan *rainbow* yaitu $z_4, y_{11}, y_{12}, x_6, x_5, w_1, w_2, v_5, v_4$.
- $a = z_5$ dan $b = v_i$, dimana $i = 1, 2, 3$, maka lintasan *rainbow* yaitu $z_5, y_{14}, y_{15}, x_2, x_1, w_4, w_5, v_1, v_2, v_3$.
- $a = z_5$ dan $b = v_i$, dimana $i = 4, 5$, maka lintasan *rainbow* yaitu $z_5, y_{14}, y_{13}, x_3, x_4, x_5, w_1, w_2, v_5, v_4$.

Dari pewarnaan sisi graf *Buckminsterfullerene* B_{60} , diperoleh $c : E(B_{60}) \rightarrow \{1, 2, \dots, 12\}$ dan dari Kasus 1 - Kasus 11, dengan diberikan 12-warna pada graf B_{60} dapat dibuktikan bahwa untuk dua titik sebarang selalu terdapat lintasan *rainbow*.

Sehingga diperoleh bahwa $rc(B_{60}) \leq 12$. ■

Pada gambar 1 diberikan ilustrasi batas atas *rainbow connection number* pada graf *Buckminsterfullerene* B_{60} .



Gambar 1. $rc(B_{60}) \leq 12$

4. Kesimpulan

Pada makalah, telah diperoleh hasil penelitian yaitu batas atas *rainbow connection number* pada graf *Buckminsterfullerene* B_{60} adalah

$$rc(B_{60}) \leq 12.$$

5. Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Ibu Dr. Lyra Yulianti, Ibu Dr. Des Wellyanti, Bapak Dr. Dodi Devianto, Bapak Dr. Effendi, dan Ibu Dr. Haripamyu yang telah memberikan masukan dan saran sehingga makalah ini dapat diselesaikan dengan baik.

Daftar Pustaka

- [1] Andova, V., Kardos, F., dan Skrekovski, R. 2014. Fullerene Graphs and Some Relevant Graph Invariants. *Topics in Chemical Graph Theory, University of*

- Kragujevac and Faculty of Science. Kragujevac*.pp:39-54, Mathematical Chemistry Monographs.978-86-6009-027-2
- [2] Andova, V., Kardos, F., dan Skrekovski, R. 2016. Mathematical aspects of fullerenes. *Ars Mathematica Contemporanea*. **11**:353-379
 - [3] Aryani, S.B., Yulianti, L. dan Sy, S. 2018. Batas Atas Bilangan Rainbow Connection Untuk Graf Kubik $C_{n,2n,2n,2n,n}$. *Jurnal Matematika UNAND*. **VII**(1):143-148
 - [4] Bartle, R.G dan Sherbert, D.R. 2010. *Introduction to Real Analysis*, Fourth Edition. John Willey and Sons, Inc. New York.
 - [5] Bondy, J.A. dan Murty, U.S.R. 2008. *Graph Theory, Graduated Texts In Mathematics*. Springer. New York.
 - [6] Chartrand, G., Kalamazoo, Johns, G., Valley, S., McKeon, K., dan Zhang, P. 2008. Rainbow Connection in Graph. *Mathematica Bohemica*. **133**:85-98.
 - [7] Li, X. dan Sun, Y. 2012. *Rainbow Connection of Graphs*. Springer, New York. Homogen. *Jurnal Matematika UNAND*. **VIII**(1):209-214
 - [8] Nessa.2018.Bilangan Rainbow Connection Untuk Graf Kubik $C_{n,2n,n}$. *Jurnal Matematika UNAND*. **VII**(1):109-114
 - [9] Sy, S., Medika, G,H. Yulianti, L. 2013. The Rainbow Connection Number of Fan and Sun. *Applied Mathematical Sciences*. **7**:3155-3160